Numerieke Analyse

Prof. Dr. Guido Vanden Berghe

Chapter 6

Benaderingstheorie

Doelstelling

In dit hoofdstuk zullen de benaderingen van functies aan bod komen, die niet steunen op het principe van interpolatie. In eerste instantie zullen de zogenaamde kleinste kwadraten aanpassingen, zowel discreet als continu, in detail besproken worden. Vermits zal blijken dat het continue geval slechts degelijk kan behandeld worden m.b.v. orthogonale functies en veeltermen zal een belangrijk deel van dit hoofdstuk gewijd zijn aan de studie van die functies en hun toepassingen bij het numeriek rekenen. In de laatste paragraaf zal ook aandacht besteed worden aan rationale benaderingstechnieken en aan de Padé benadering in het bijzonder.

De studie van de benaderingstheorie omvat twee algemene types van problemen. Eén probleem treedt op wanneer een functie expliciet gegeven wordt, maar wanneer het wenselijk is een *eenvoudiger* type functie te vinden, zoals bijvoorbeeld een veelterm, die kan gebruikt worden om benaderde waarden van de gegeven functie te bepalen. Het tweede probleem in de benaderingstheorie is te situeren bij het aanpassen van functies aan gegeven waarden en het vinden van de *beste* functie in een gegeven klasse die kan gebruikt worden om de gegevens voor te stellen.

Beide problemen werden in hoofdstuk 5 reeds aangeraakt. De Lagrange interpolatieveelterm en de andere vormen voor die veelterm werden ingevoerd hetzij als benaderingen voor functies, hetzij als fit voor bepaalde gegevens. De kubische splines en de Hermite polynomen kunnen ook antwoorden geven voor bovenstaande problemen. In dit hoofdstuk zullen andere technieken voor de benadering van functies aan de orde komen.

6.1 De Taylorveelterm

Hier wensen we de bruikbaarheid van de Taylorreeks als middel voor functiebenadering te illustreren. Taylor's theorema is bruikbaar voor functies die een zeker aantal continue afgeleiden bezitten. Voor functies waarvoor het Taylor theorema van toepassing is, mag men de mogelijkheid om deze voor te stellen m.b.v. de *Taylorveelterm* niet over het hoofd zien.

Laat ons even herinneren dat, wanneer f een functie is met een continue $(n+1)^{de}$ afgeleide over een interval $(c-\delta, c+\delta)$, deze functie kan geschreven worden als

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x)\,, \tag{6.1}$$

waarbij p_n een veelterm is met graad kleiner dan of gelijk aan n en E_n de sluitterm of restterm voorstelt. Deze worden gegeven door

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k \tag{6.2}$$

en

$$\begin{aligned} E_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)(x-c)^{n+1} \quad |\xi_x - c| < \delta\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Een belangrijk speciaal geval treedt op wanneer $c = 0$ wordt; dan spreken we van een *Maclaurin*reeks.

Door Taylor's theorema bekomen we Taylorreeksen voor vele belangrijke functies zoals

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{6.4}$$

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k \quad (0 < x < 2)\,. \tag{6.5}$$

De reeksen, die in deze voorbeelden optreden zijn *machtreeksen*. Volgend theorema geeft aan wanneer deze machtreeksen convergeren en hoe ze in de praktijk bij numeriek werk kunnen aangewend worden. We geven enkel de verwoording van de theorema's en gaan niet in op de bewijzen.

Theorema 6.1.1

Voor elke machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

bestaat er een getal r in het interval $[0,\infty]$ zo dat de reeks convergeert voor $|x-c| < r$ en divergeert voor $|x-c| > r$.

Het getal r (dit kan ∞ zijn) wordt de *convergentiestraal* van de reeks genoemd. Ze kan zeer vaak berekend worden door de zgn. verhoudingstest, d.w.z. als

$$\lim_{n\to\infty} |A_{n+1}/A_n| < 1$$

dan convergeert $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$. Gebruik deze test als oefening om aan te tonen dat de cosinusreeks (6.4) convergeert voor alle reële x-waarden. Als daarenboven

$$\lim_{n\to\infty} |A_{n+1}/A_n| > 1$$

dan divergeert $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$. Gebruik dit feit tezamen met het voorgaande om als oefening de convergentiestraal van (6.5) te bepalen. Hieruit blijkt dat de convergentiestraal voor de cosinusontwikkeling (6.4) ∞ is, terwijl deze voor de reeks (6.5) $+1$ is.

Voor het gebruik van Taylorreeksen in numerieke toepassingen is volgend theorema van belang.

Theorema 6.1.2

Weze r de convergentiestraal van $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ dan definieert

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

een functie die continu afleidbaar is in het interval $|x-c| < r$. Bovendien is

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-c)^{k-1}\,.$$

Deze reeks bezit ook een convergentiestraal r. Als bovendien $|b-c| < r$ en $|x-c| < r$ dan wordt

$$\int_b^x f(t)dt$$

bekomen door de termsgewijze integratie van de f-reeks. De resulterende reeks heeft ook een convergentiestraal r.

Bovenstaande samenvattend kunnen we vooropstellen dat we een machtreeks termsgewijs kunnen afleiden en integreren binnen zijn convergentieinterval.

Voorbeeld 6.1.1

We beschouwen de transcendente functie, de sinusintegraal, gedefinieerd als

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt\,.$$

Bepaal een benadering voor deze integraal.

Oplossing

Steunend op bovenstaande theorema's kunnen we als volgt te werk gaan.

$$\begin{aligned}
\sin t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\frac{\sin t}{t} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \\
\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^x t^{2k} dt \\
\mathrm{Si}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}
\end{aligned}$$

De bekomen reeks voor $\mathrm{Si}(x)$ convergeert snel voor kleine waarden van x.
□

6.2 Discrete kleinste kwadratenaanpassing

Veronderstel dat er experimenteel in een gebied tussen x_0 en x_n een reeks meetresultaten y_i $(i = 0, \ldots, n)$ met een zekere meetfout bekend zijn. De methoden, besproken bij de interpolatietheorie, (hoofdstuk 5) veronderstellen dat de geconstrueerde benaderingsvormen in de punten x_i samenvallen met de y_i. Wanneer de gegevens met meetfouten behept zijn, is het wenselijker te zoeken naar een eenvoudiger wetmatigheid welke zo dicht mogelijk de meetresultaten weergeeft.

Het probleem van discrete kleinste kwadraten bestaat erin een lineaire combinatie te vinden van voorgeschreven lineair onafhankelijke functies $g_0, \ldots, g_m$, wier waarden in de punten x_i de gegeven waarden $y_0, \ldots, y_n$ zo goed mogelijk benaderen. In veel praktische toepassingen kiest men als functies g_k respectievelijk x^k . In dergelijke omstandigheden wordt de verzameling gegevens $\{(x_i,\, y_i) | i = 0, 1, \ldots, n\}$ benaderd door een veelterm $p_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ van graad $m < n$ en wordt als criterium vooropgesteld dat de grootheid

$$\sum_{i=0}^{n} (y_i - p_m(x_i))^2 \tag{6.6}$$

minimaal zou zijn. Definiëren we

$$S(a_0, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - \ldots - a_m x_i^m)^2$$

dan is het voorgestelde criterium als volgt te vertolken

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \, , \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \, , \; \ldots \; , \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0 \, ,$$

of

$$\sum_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - \ldots - a_m x_i^m) x_i^j = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

of

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^j + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{j+1} + \quad \ldots \quad + a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{j+m} = \sum_{i=0}^{n} x_i^j y_i \qquad (j = 0, 1, \ldots, m) \, . \tag{6.7}$$

Dit is een stelsel van $m+1$ lineaire vergelijkingen in $m+1$ onbekenden, de zgn. *normaal* vergelijkingen. De coëfficiëntenmatrix is als volgt te noteren :

$$D_m = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_m \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{m+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ s_m & s_{m+1} & \ldots & s_{2m} \end{bmatrix} \qquad \text{met} \qquad s_j = \sum_{i=0}^{n} x_i^j \, .$$

Wanneer de determinant van D_m verschillend is van nul dan is het stelsel (6.7) een stelsel van Cramer en bepaalt het $a_0, a_1, \ldots, a_m$ éénduidig.

Theorema 6.2.1

De matrix D_m is symmetrisch en positief definiet.

Bewijs

Bij constructie is de matrix D_m symmetrisch. Daarenboven is het gemakkelijk te verifiëren dat

$$D_m = V^T \times V$$

met V de volgende $(n+1) \times (m+1)$ matrix

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^m \\ \vdots & & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^m \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt dat voor een willekeurige $(m+1)$-dimensionale vector a

$$\langle Da, a\rangle = a^T Da = a^T V^T V a = (Va)^T (Va) = \langle Va, Va\rangle$$

Het in-produkt $\langle Va, Va\rangle \geq 0$. Het gelijk worden aan nul van het in-produkt impliceert $Va = 0$. Vermits bij constructie de kolommen van V lineair onafhankelijk zijn impliceert $Va = 0$ automatisch $a = 0$. D.w.z. dat $\langle Va, Va\rangle > 0$ voor $a \neq 0$, wat het gestelde bewijst. □

Een symmetrische positief definiete matrix kan geschreven worden als een produkt van een niet-singuliere beneden triangulaire matrix en zijn getransponeerde (zie paragraaf 2.2.2). Dit betekent dat $\det(D_m) \neq 0$. Hieruit kunnen we besluiten dat er steeds een stel coëfficiënten a_0, $a_1, \ldots,$ a_m bestaat waarvoor $\sum_{k=0}^{m} a_k\, x^k$ voldoet aan het discrete kleinste kwadraten principe t.o.v. $\{(x_i, y_i) | i = 0, 1, \ldots,\ n\}$ met $n > m$.

De discrete kleinste kwadraten methode zoals hierboven geschetst, laat toe een globale vereffening uit te voeren, aangezien er naar de veelterm van graad m gezocht wordt, die zich het best door *alle* experimentele punten legt. Daardoor wordt de correctie op elke ordinaat beïnvloed door alle gegeven meetpunten. Het soms niet zo geschikt zijn van dergelijke werkwijze doet ons uitzien naar zgn. *lokale vereffening* van de experimentele meetpunten. Hierbij wordt in een abscis x_k waar een meting van y gebeurd is, het meetresultaat y_k onderworpen aan een correctie die slechts een *gering* aantal naburige ordinaten in het gedrang brengt. De meeste van deze vereffeningsvoorschriften steunen op de discrete kleinste kwadraten gedachte.

Beschouwen we opnieuw een stel meetwaarden $\{(x_i, y_i) | i = 0, 1, \ldots, n\}$ en stellen we voor de eenvoud equidistantie voor tussen de x_i, i.e. $x_{k+1} - x_k = \Delta x$. Is x_k een abscis niet te dicht bij de uiteinden gelegen, dan wensen we voor $(x_k,\ y_k)$ een correctie formule te construeren die p punten links en p punten rechts van $(x_k,\ y_k)$ in het gedrang brengt. Beschouwen we ter illustratie het meest eenvoudige voorbeeld in deze context, nl. de zgn. lineaire lokale vereffening, waarbij we de veelterm

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x$$

in acht nemen en rond x_k één linkse nabuur x_{k-1} en één rechtse x_{k+1} in de berekening betrekken.

Het discrete kleinste kwadraten voorschrift levert voor bovenstaand probleem het criterium :

$$(y_{k-1} - a_0 - a_1\, x_{k-1})^2 + (y_k - a_0 - a_1\, x_k)^2 + (y_{k+1} - a_0 - a_1\, x_{k+1})^2$$

moet minimum zijn. Dit criterium is vertaalbaar in onderstaand stelsel in de onbekenden a_0 en a_1

$$\left\{\begin{array}{l} (y_{k-1} + y_k + y_{k+1}) - 3a_0 - a_1(x_{k-1} + x_k + x_{k+1}) = 0 \\ \\ (x_{k-1}\, y_{k-1} + x_k\, y_k + x_{k+1}\, y_{k+1}) - a_0(x_{k-1} + x_k + x_{k+1}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a_1(x_{k-1}^2 + x_k^2 + x_{k+1}^2) = 0 \end{array}\right. \tag{6.8}$$

Hieruit kunnen in principe a_0 en a_1 opgelost worden.

In het geval van equidistantie tussen de meetpunten, volgt rechtstreeks uit de eerste relatie in (6.8)

$$\frac{y_{k-1} + y_k + y_{k+1}}{3} = a_0 + a_1\, x_k = p_1(x_k)$$

wat aantoont dat de beschouwde lokale vereffening erin bestaat elke y_k te vervangen door $(y_{k-1} + y_k + y_{k+1})/3$ voor $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Aan de uiteinden kan dit evenwel niet gebeuren, wegens gebrek aan een links naburig punt voor x_0 en een rechts naburig punt voor x_n . Dit probleem lost men doorgaans op door voor die punten respectievelijk gebruik te maken van de rechte behorend bij (x_1, y_1) en $(x_{n-1},\, y_{n-1})$ waarin men respectievelijk $x = x_0$ en $x = x_n$ substitueert. Als voorbeeld hiervan beschouwen we het puntentriplet $(x_0,\, y_0)$, $(x_1,\, y_1)$ en $(x_2,\, y_2)$. Het stelsel (6.8) wordt in geval van equidistantie voor deze drie punten als volgt herschreven.

$$y_0 + y_1 + y_2 = 3a_0 + 3a_1\, x_1 \tag{6.9}$$
$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 = 3a_0 x_1 + a_1(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)\,. \tag{6.10}$$

Door de term in a_0 te elimineren uit (6.9) en (6.10) resulteert er

$$(x_0 - x_1)y_0 + (x_2 - x_1)y_2 = a_1(x_0^2 - 2x_1^2 + x_2^2)$$

wat rekening houdend met de equidistantie te schrijven is als

$$\begin{aligned} (y_2 - y_0)\Delta x &= a_1[(x_1 - \Delta x)^2 - 2x_1^2 + (x_1 + \Delta x)^2] \\ &= 2a_1(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

waaruit

$$a_1 = \frac{y_2 - y_0}{2\Delta x}\,.$$

Dit introducerend in (6.9) levert :

$$a_0 = \frac{(y_0 - y_2)x_0}{2\Delta x} + \frac{5y_0 + 2y_1 - y_2}{6}\,.$$

Hieruit volgt dan dat

$$\begin{aligned} p_1(x_0) = a_0 + a_1 x_0 &= \frac{(y_0 - y_2)}{2\Delta x}\, x_0 + \frac{5y_0 + 2y_1 - y_2}{6} + \frac{y_2 - y_0}{2\Delta x}\, x_0 \\ &= \frac{5y_0 + 2y_1 - y_2}{6}\,. \end{aligned}$$

Op analoge wijze kan men aan het andere uiteinde van de gegevenstabel steunend op het triplet $(x_{n-2},\, y_{n-2})$, $(x_{n-1},\, y_{n-1})$ en $(x_n,\, y_n)$ afleiden dat

$$p_1(x_n) = a_0 + a_1 x_n = \frac{-y_{n-2} + 2y_{n-1} + 5y_n}{6}\ . \tag{6.11}$$

De lokale vereffening met één paar dichtste naburen en een veelterm van de eerste graad is dan als volgt te verrichten in het geval van equidistantie van de abscissen :

- aanvangsformule : $p_1(x_0) = (5y_0 + 2y_1 - y_2)/6$
- centrale formule : $p_1(x_k) = (y_{k-1} + y_k + y_{k+1})/3 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$
- eindformule : $p_1(x_n) = (-y_{n-2} + 2y_{n-1} + 5y_n)/6$.

Opmerking 6.2.1

Soms wordt i.p.v. het criterium (6.6) het volgende meer algemene alternatief voorgesteld:

$$\sum_{i=0}^{n} w_i (y_i - p_m(x_i))^2\ ,$$

waarbij de w_i gewichten zijn, die gegeven positieve getallen voorstellen. Het invoeren van gewichten laat ons toe verschillende graden van belangrijkheid te hechten aan verschillende abscissen. In dit geval kan men op analoge wijze een stelsel *normaal* vergelijkingen afleiden. Stelsel (6.7) neemt dan ook de volgende algemener vorm aan:

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^j + a_1 \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^{j+1} + \quad \ldots \quad + a_m \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^{j+m} = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^j y_i \qquad (j = 0, 1, \ldots, m)\ . \tag{6.12}$$

Voorbeeld 6.2.1

Gegeven de volgende waarden:

x_i	-5	-3	1	3	4	6	8
y_i	18	7	0	7	16	50	67
w_i	1	1	1	1	20	1	1

Er wordt gevraagd voor de gegeven waarden de kwadratische kleinste kwadraten aanpassing te construeren.

Oplossing

De normaal vergelijkingen voor dit probleem zijn

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=0}^{6} w_i + a_1 \sum_{i=0}^{6} w_i x_i + a_2 \sum_{i=0}^{6} w_i x_i^2 &= \sum_{i=0}^{6} w_i y_i \\
a_0 \sum_{i=0}^{6} w_i x_i + a_1 \sum_{i=0}^{6} w_i x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{6} w_i x_i^3 &= \sum_{i=0}^{6} w_i x_i y_i \\
a_0 \sum_{i=0}^{6} w_i x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{6} w_i x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{6} w_i x_i^4 &= \sum_{i=0}^{6} w_i x_i^2 y_i
\end{aligned}$$

Na uitvoering van de sommen dient volgend stelsel opgelost te worden:

$$\begin{cases} 26a_0 + 90a_1 + 464a_2 = 469 \\ 90a_0 + 464a_1 + 1884a_2 = 2026 \\ 464a_0 + 1884a_1 + 11300a_2 = 11784 \end{cases} \tag{6.13}$$

waarvan de oplossing luidt

$$a_0 = -3.4079 \quad a_1 = 0.6964 \quad a_2 = 1.0667$$

6.3 Continue kleinste kwadraten benadering

De vorige paragraaf behandelt de kleinste kwadraten aanpassing aan een discrete verzameling meetgegevens. Het andere benaderingsprobleem aangehaald in de inleiding slaat op de benadering van functies. Veronderstel dat $f \in C[a, b]$ (d.w.z. we beschouwen de verzameling functies die continu zijn in het gesloten interval $[a, b]$) en dat een veelterm $p_n(x)$ van graad tenminste n, vereist is om de volgende uitdrukking te minimaliseren :

$$\int_a^b (f(x) - p_n(x))^2 dx \tag{6.14}$$

met $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Definiëren we in analogie met het discrete vraagstuk :

$$E(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_a^b \Big(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Big)^2 dx$$

dan wordt bovenstaand criterium vertolkt als

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \qquad \text{voor} \qquad j = 0, 1, \ldots, n \qquad \text{of}$$

$$\int_a^b \Big(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Big) x^j dx = 0 \, .$$

Dus om $p_n(x)$ éénduidig te bepalen moet het volgende stelsel lineaire vergelijkingen opgelost worden naar a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx \; , \qquad j = 0, 1, \ldots, n \; .$$

Opnieuw krijgen die de naam *normaal* vergelijkingen mee, en bovenstaand stelsel is een stelsel van Cramer zoals in het discrete vraagstuk. Vermits voor een willekeurige vector x

$$\begin{aligned}
< Ax, x > &= \sum_{i,j,0}^{n} A_{ij} x_i x_j = \\
&= \sum_{i,j=0}^{n} \left(\frac{b^{i+j+1} x_i x_j}{i+j+1} - \frac{a^{i+j+1} x_i x_j}{i+j+1} \right) \\
&= \int_a^b \sum_{i,j,=0}^{n} t^{i+j} x_i x_j dt \\
&= \int_a^b \sum_i (t^i x_i) \sum_j (t^j x_j) dt \\
&= \int_a^b (\sum_{i=0}^{n} t^i x_i)^2 dt > 0
\end{aligned}$$

volgt hieruit dat A positief definiet is, zodat $\det A \neq 0$

Dit stelsel is voorts herschrijfbaar als :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left[\frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1} \right] = \int_a^b x^j f(x) dx \; , \qquad j = 0, 1, \ldots, n \, . \tag{6.15}$$

Voorbeeld 6.3.1

We beschouwen de (continue) kubische veelterm kleinste kwadraten benadering van e^x in het interval $[0, 1]$. Uit bovenstaande theorie is gemakkelijk af te leiden dat de normaal vergelijkingen kunnen genoteerd worden als

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \\ e-2 \\ 6-2e \end{bmatrix} .$$

De oplosssing van dit stelsel is

$$\begin{aligned} a_0 &= -1456 + 536e, & a_1 &= 16800 - 6180e \\ a_2 &= -41100 + 15120e, & a_3 &= 27020 - 9940e \, , \end{aligned}$$

wat resulteert in de volgende derde-graadsveelterm

$$p_3(x) = 0.27863x^3 + 0.42125x^2 + 1.01830x + 0.99906 \, . \quad \square$$

De optredende coëfficiëntenmatrix die voorkomt in het voorbeeld 6.3.1 is een Hilbertmatrix. Van dergelijke matrices is bekend dat ze slecht geconditioneerd zijn. Numerieke resultaten bekomen door gebruik te maken van die matrices zijn sterk gevoelig voor afrondingsfouten en moeten als onbetrouwbaar beschouwd worden. Deze eigenschap wordt ongelukkig ook gedeeld met de normaal vergelijkingen (6.15) voor willekeurige waarden van a en b. De graad van slecht geconditioneerd zijn stijgt in het algemeen met de orde van de matrix. Om hieraan te verhelpen gaat men meestal over op een andere techniek om kleinste kwadraten benaderingen te bekomen, voor $f \in C[a,b]$. Hiertoe moeten wel enkele concepten geïntroduceerd worden.

In de verdere notatie stelt Π_n de verzameling van alle veeltermen voor van graad kleiner dan of gelijk aan n. Verder stellen $\phi_0, \ldots, \phi_n$ functies voor die continu zijn en voldoen aan de volgende eigenschappen :

Definitie 6.3.1

De functies $\phi_0, \ldots, \phi_n$ zijn lineair onafhankelijk in $[a,b]$ waarbij $b > a$ als er uit

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \ldots + c_n\phi_n(x) = 0 \qquad \text{voor alle} \qquad x \in [a,b]$$

volgt dat $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$. Anders worden de functies lineair afhankelijk genoemd. □

Theorema 6.3.1

Als $\phi_j(x)$ voor elke $j = 0, 1, \ldots, n$ een veelterm is van graad j dan zijn $\phi_0, \ldots, \phi_n$ lineair onafhankelijke functies in elk interval $[a,b]$ met $a < b$.

Bewijs

Veronderstel dat $c_0, \ldots, c_n$ reële getallen zijn waarvoor

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \ldots + c_n\phi_n(x) = 0 \quad \text{voor alle} \quad x \in [a,b]\,.$$

Vermits $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\phi_k(x)$ verdwijnt in $[a,b]$ bezit P een oneindig aantal wortels. $P(x)$ is een veelterm van hoogstens n^{de} graad die verdwijnt in meer dan n wortelpunten, d.w.z. de coëfficiënt van elke macht van x verdwijnt. Vermits elke ϕ_j exact van j^{de} graad is, impliceert dit dat $c_j = 0$ voor elke $j = 0, 1, \ldots, n$. □

Voorbeeld 6.3.2

Weze $\phi_0(x) = 2$, $\phi_1(x) = x - 3$, $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$. Uit theorema 6.3.1 volgt dat ϕ_0, ϕ_1 en ϕ_2 lineair onafhankelijk zijn in het interval $[a,b]$ als $b > a$. Veronderstel dat $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ een element uit Π_2

voorstelt dan kunnen we aantonen dat er constanten a'_0, a'_1, a'_2 bestaan zo dat $Q(x) = a'_0\phi_0(x) + a'_1\phi_1(x) + a'_2\phi_2(x)$. Inderdaad

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2}\,\phi_0(x) \\
x &= \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\,\phi_0(x) \\
x^2 &= = \phi_2(x) - 2x - 7 = \phi_2(x) - 2[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\,\phi_0(x)] - \frac{7}{2}\,\phi_0(x)
\end{aligned}$$

waaruit

$$\begin{aligned}
Q(x) &= a_0\Big[\frac{1}{2}\,\phi_0(x)\Big] + a_1\Big[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\,\phi_0(x)\Big] + a_2\Big[\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\,\phi_0(x)\Big] \\
&= \Big[\frac{1}{2}\,a_0 + \frac{3}{2}\,a_1 - \frac{13}{2}\,a_2\Big]\phi_0(x) + [a_1 - 2a_2]\phi_1(x) + a_2\,\phi_2(x)\,.
\end{aligned}$$

Dit voorbeeld illustreert een algemener eigenschap, die als volgt in een theorema kan verwoord wordt.

□

Theorema 6.3.2

Als $\phi_0,\ \phi_1, \ldots, \phi_n$ een verzameling is van onafhankelijke veeltermen in Π_n dan kan elke andere veelterm in Π_n eenduidig geschreven worden als een lineaire combinatie van $\phi_0,\ \phi_1, \ldots,\ \phi_n$. (zonder bewijs)

Definitie 6.3.2

Een integreerbare functie w wordt een gewichtsfunctie in $[a, b]$ genoemd als $w(x) \geq 0$ voor $x \in [a, b]$, maar $w(x) \not\equiv 0$ in elk deelinterval van $[a, b]$ (de gewichtsfunctie kan wel nul worden in enkele discrete punten van het interval $[a, b]$). □

Het doel van gewichtsfuncties bestaat erin verschillende graden van belangrijkheid toe te kennen aan benaderingsfouten in bepaalde gebieden van het interval. Veronderstel dat $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ lineair onafhankelijke functies in $[a, b]$ zijn, dat w een gewichtsfunctie is in $[a, b]$ en dat voor $f \in C[a, b]$ een lineaire combinatie

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x)$$

gezocht wordt die

$$E(a_0, \ldots, a_n) = \int_a^b w(x)[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x)]^2 dx \tag{6.16}$$

minimaliseert. Dit probleem reduceert zich in het bijzonder tot de situatie beschouwd aan het begin van deze paragraaf, als de gewichtsfunctie $w(x) = 1$ en $\phi_k(x) = x^k$ voor elke $k = 0, 1, \ldots, n$. De normaal vergelijkingen geassocieerd met (6.16) volgen uit

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_j} = 2\int_a^b w(x)\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x)\right]\phi_j(x)dx\,, \quad \text{voor} \quad j = 0, 1, \ldots, n\,,$$

wat kan geschreven worden als

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)f(x)\phi_j(x)dx \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n} a_k\int_a^b w(x)\phi_k(x)\phi_j(x)dx \\ &\qquad\qquad \text{voor} \quad j = 0, 1, \ldots, n\,.\end{aligned}$$

Veronderstel dat de functies $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ zo kunnen gekozen worden dat

$$\int_a^b w(x)\phi_k(x)\phi_j(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad j \neq k \\ \gamma_k > 0 & \text{als} \quad j = k\,. \end{cases} \tag{6.17}$$

Dan geldt voor elke $j = 0, 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} &\int_a^b w(x)f(x)\phi_j(x)dx = a_j\int_a^b w(x)[\phi_j(x)]^2dx = a_j\gamma_j \qquad \text{en} \quad \text{dus} \\ &a_j = \frac{1}{\gamma_j}\int_a^b w(x)f(x)\phi_j(x)dx\,. \end{aligned}$$

De kleinste kwadraten benaderingsmethode wordt aldus sterk vereenvoudigd wanneer de functies $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ zo gekozen worden dat ze voldoen aan (6.17). Dergelijke functies worden orthogonale functies genoemd in het interval $[a, b]$ t.o.v. de gewichtsfunctie $w(x)$.

Definitie 6.3.3

$\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ wordt een orthogonale verzameling van functies genoemd in het interval $[a, b]$ t.o.v. de gewichtsfunctie w als

$$\int_a^b w(x)\phi_j(x)\phi_k(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad j \neq k \\ \gamma_k > 0 & \text{als} \quad j = k\,. \end{cases}$$

Als daarenboven $\gamma_k = 1$ voor elke $k = 0, 1, \ldots, n$ dan wordt de verzameling orthonormaal genoemd. □

Bovenstaande ideeën samenvoegend leidt tot :

Theorema 6.3.3

Als $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ een verzameling orthogonale functies is in het interval $[a, b]$ t.o.v. de gewichtsfunctie w dan is de kleinste kwadraten benadering van f in $[a, b]$ t.o.v. de gewichtsfunctie w

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$$

met

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x)\phi_k(x)f(x)dx}{\int_a^b w(x)[\phi_k(x)]^2 dx} = \frac{1}{\gamma_k}\int_a^b w(x)\phi_k(x)f(x)dx\ .$$

Voorbeeld 6.3.3

Voor elk positief geheel getal n vormt de verzameling functies $\Im_n = \{\phi_0,\ \phi_1, \ldots,\ \phi_{2n-1}\}$ met

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
\phi_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \qquad \text{voor elke } k = 1, 2, \ldots, n \quad \text{en} \\
\phi_{n+k}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \quad \text{voor elke } k = 1, 2, \ldots, n-1
\end{aligned}$$

een orthonormaal stel functies in $[-\pi, \pi]$ voor de gewichtsfunctie $w(x) = 1$. Als nu $f \in C[-\pi, \pi]$, is de kleinste kwadraten aanpassing (ook trigonometrische veelterm genoemd) d.m.v. functies in $\Im_n$ gedefinieerd door

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \phi_k(x) \\
\text{met } a_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi_k(x)dx \qquad \text{voor elke } k = 0, 1, \ldots,\ 2n-1\ .
\end{aligned}$$

De limiet van S_n wanneer $n \to \infty$ is de welbekende Fourier reeksontwikkeling van f .

Om de trigonometrische veelterm opgespannen door $\Im_n$ te bepalen die

$$f(x) = |x|$$

benadert voor $-\pi < x < \pi$, dienen we te berekenen

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2\sqrt{\pi}} \\
a_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} x\ \cos(kx)dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,k^2}\left[(-1)^k - 1\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{voor } k = 1, 2, \ldots,\ n \quad \text{en} \\
a_{n+k} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin(kx)dx = 0 \quad \text{voor elke } k = 1, 2, \ldots, n-1\ .
\end{aligned}$$

De trigonometrische veelterm opgespannen door $\Im_n$ die $|x|$ benadert is dus

$$S_n(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(kx)\,.$$

$\square$

6.4 Orthogonale veeltermen

Alhoewel orthogonale functies en veeltermen in het bijzonder ook behandeld zijn in de cursus analyse behandelen we in deze paragraaf enkele nuttige eigenschappen, die voor numerieke analyse problemen van uitzonderlijk belang zijn.

Het volgende theorema, dat steunt op het zgn. Gram–Schmidt proces, beschrijft hoe orthogonale veeltermen in $[a,b]$ t.o.v. de gewichtsfunctie $w(x)$ geconstrueerd kunnen worden.

Theorema 6.4.1

De verzameling veeltermen $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ gedefinieerd zoals hieronder in $[a,b]$ t.o.v. de gewichtsfunctie w is orthogonaal :

$$\phi_0(x) = 1\,,$$

$$\phi_1(x) = x - B_1$$

voor elke $a \leq x \leq b$ waarbij

$$B_1 = \frac{\int_a^b x w(x)[\phi_0(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x)[\phi_0(x)]^2 dx}\,,$$

wanneer $k \geq 2$

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x)$$

voor elke $a \leq x \leq b$ waarbij

$$B_k = \frac{\int_a^b x w(x)[\phi_{k-1}(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-1}(x)]^2 dx} \qquad en$$

$$C_k = \frac{\int_a^b x w(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x) dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-2}(x)]^2 dx}\,.$$

Bewijs

Elke ϕ_k is van de vorm $1.x^k$ + lagere orde termen, zo dat alle noemers in B_k en C_k verschillend van nul zijn. We zullen nu door inductie aantonen dat

$$\int_a^b w(x)\phi_k(x)\phi_i(x)dx = 0 \qquad \text{voor elke } i < k\,.$$

Voor $k = 1$

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)\phi_1(x)\phi_0(x)dx &= \int_a^b w(x)(x - B_1)dx \\ &= \int_a^b xw(x)dx - B_1\int_a^b w(x)dx \\ &= \int_a^b xw(x)[\phi_0(x)]^2dx - \left[\frac{\int_a^b xw(x)[\phi_0(x)]^2dx}{\int_a^b w(x)[\phi_0(x)]^2dx}\right]\int_a^b w(x)[\phi_0(x)]^2dx = 0\,.\end{aligned}$$

Veronderstel dat het resultaat waar is voor $k = n-1$ dan geldt voor $k = n$ en $i = n-1$

$$\begin{aligned}&\int_a^b w(x)\phi_n(x)\phi_{n-1}(x)dx \\ &\quad= \int_a^b w(x)[(x - B_n)\phi_{n-1}(x) - C_n\phi_{n-2}(x)]\phi_{n-1}(x)dx \\ &\quad= \int_a^b w(x)(x - B_n)[\phi_{n-1}(x)]^2dx \\ &\quad= \int_a^b xw(x)[\phi_{n-1}(x)]^2dx - B_n\int_a^b w(x)[\phi_{n-1}(x)]^2dx = 0\,.\end{aligned}$$

Op analoge wijze kan aangetoond worden dat voor $k = n$ en $i = n-2$ (trek dit zelf na als oefening)

$$\int_a^b w(x)\phi_n(x)\phi_{n-2}(x)dx = 0\,. \tag{6.18}$$

Voor $k = n$ en $i < n-2$ hebben we

$$\begin{aligned}&\int_a^b w(x)\phi_n(x)\phi_i(x)dx \\ &\quad= \int_a^b w(x)[(x - B_n)\phi_{n-1}(x) - C_n\phi_{n-2}(x)]\phi_i(x)dx \\ &\quad= \int_a^b w(x)x\phi_{n-1}(x)\phi_i(x)dx \\ &\quad= \int_a^b w(x)\phi_{n-1}(x)[\phi_{i+1}(x) + B_{i+1}\phi_i(x) + C_{i+1}\phi_{i-1}(x)]dx = 0\,. \quad \square\end{aligned}$$

Theorema 6.4.2

Voor elke $n > 0$ *zijn de veeltermen* $\phi_0, \ldots, \phi_n$ *uit theorema 6.4.1 lineair onafhankelijk in* $[a, b]$ *en*

$$\int_a^b w(x)\phi_n(x)Q_k(x)dx = 0$$

voor elke veelterm Q_k *van graad* $k < n$.

Bewijs

Het is evident dat het eerste deel van het bewijs rechtstreeks volgt uit theorema 6.3.1. We geven hier echter een alternatief bewijs.

Om aan te tonen dat $\phi_0, \ldots, \phi_n$ lineair onafhankelijk zijn, veronderstel dat

$$0 = c_0\phi_0(x) + \ldots + c_n\phi_n(x) \qquad \text{voor elke} \quad x \in [a, b] .$$

Voor elke $k = 0, 1, \ldots, n$ vermenigvuldig met $w(x)\phi_k(x)$ om te bekomen

$$0 = \sum_{j=0}^{n} c_j w(x)\phi_j(x)\phi_k(x) .$$

Dan

$$0 = \sum_{j=0}^{n} c_j \int_a^b w(x)\phi_j(x)\phi_k(x)dx = c_k \int_a^b w(x)[\phi_k(x)]^2 dx$$

waaruit volgt $c_k = 0$. Vermits dit waar is voor elke $k = 0, 1, \ldots, n$ volgt hieruit dat $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ een verzameling lineair onafhankelijke functies is. Weze $Q_k(x)$ een veelterm van graad k. Uit theorema 6.3.2. volgt dat er getallen $c_0, \ldots, c_k$ bestaan zo dat

$$Q_k(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j\phi_j(x) .$$

Dus

$$\int_a^b w(x)Q_k(x)\phi_n(x)dx = \sum_{j=0}^{k} c_j \int_a^b w(x)\phi_j(x)\phi_n(x)dx = 0$$

vermits ϕ_n orthogonaal is t.o.v. ϕ_j voor elke $j = 0, 1, \ldots, k \quad (k < n)$. □

Voorbeeld 6.4.1

Eén van de meest frequent optredende verzamelingen van orthogonale veeltermen is deze van de Legendre veeltermen, die orthogonaal zijn in $[-1, 1]$ t.o.v. een gewichtsfunctie $w(x) \equiv 1$. De klassieke definitie van de Legendre veeltermen vereist dat $P_n(1) = 1$ voor elke n en een recursieve relatie kan gebruikt worden om de veeltermen met $n \geq 2$ te genereren. Volgens theorema 6.4.1 is :

$$
\begin{aligned}
&\phi_0(x) \equiv 1 \\
&B_1 = \frac{\int_{-1}^{1} x dx}{\int_{-1}^{1} dx} = 0 \\
&\phi_1(x) = (x - B_1) = x \\
&B_2 = \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = 0 \qquad \text{en} \qquad C_2 = \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} dx} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

en $\phi_2(x) = (x - B_2)\phi_1(x) - C_2\phi_0(x) = (x - 0)x - \frac{1}{3} \,.\, 1 = x^2 - \frac{1}{3}$.
Zo ook

$$
\begin{aligned}
B_3 &= \frac{\int_{-1}^{1} x(x^2 - \frac{1}{3})^2 dx}{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = 0 \\
C_3 &= \frac{\int_{-1}^{1} x.x.(x^2 - \frac{1}{3}) dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \frac{8/45}{2/3} = \frac{4}{15}
\end{aligned}
$$

en zo

$$
\begin{aligned}
\phi_3(x) &= (x - B_3)\phi_2(x) - C_3\phi_1(x) \\
&= x.(x^2 - \frac{1}{3}) - \frac{4}{15}\, x = x^3 - \frac{3}{5}\, x \qquad \text{enz.} \ldots
\end{aligned}
$$

Wensen we de klassieke definitie te weerhouden (d.i. $P_n(1) = 1$), dan leiden we gemakkelijk af

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= \phi_0(x) = 1 \\
P_1(x) &= \phi_1(x) = x \\
P_2(x) &= \frac{3}{2}\, \phi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{5}{2}\, \phi_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \qquad \text{enz} \ldots
\end{aligned}
$$

wat in overeenstemming is met de algemene definitie voor Legendre veeltermen : (formule van Rodrigues)

$$
P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\, n\,!}\, \frac{d^n}{dx^n}[(1 - x^2)^n] \qquad n \geq 1 \quad \text{en} \quad P_0(x) \equiv 1\,. \tag{6.19}
$$

Merk wel op dat de op die wijze gedefinieerde Legendre veeltermen niet genormeerd zijn op één. Hun norm wordt gegeven door

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x)dx = \frac{2}{2k+1}\,\delta_{kl}\,. \tag{6.20}$$

Uit (6.19) en (6.20) kunnen we tevens de coëfficiënt van x^n in $P_n(x)$ bepalen, i.e.

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n} - nx^{2n-2} + \ldots) \\ &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\,x^n - \ldots \end{aligned} \tag{6.21}$$

waaruit volgt dat de coëfficiënt van x^n gegeven wordt door

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\,, \tag{6.22}$$

terwijl het uit bovenstaande bespreking evident is dat de coëfficiënt van x^{n-1} nul is.

□

Voorbeeld 6.4.2

Een ander verzameling orthogonale veeltermen, die we verder in dit hoofdstuk zullen aanwenden, is de verzameling van de Chebyshev polynomen, $\{T_n\}$. Zij kunnen uit theorema 6.4.1 afgeleid worden in het interval $[-1,1]$ door gebruik te maken van de gewichtsfunctie $(1-x^2)^{-1/2}$. Wij zullen nu de Chebyshev veeltermen rechtstreeks afleiden, en nadien aantonen dat ze voldoen aan de vereiste orthogonaliteitsvoorwaarden.

Voor $x \in [-1,1]$ definieer

$$T_n(x) = \cos[n\,\mathrm{bgcos}\ x] \qquad \text{voor elke } n \geq 0\,.$$

Voer de substitutie $\theta = \mathrm{bgcos}\ x$ in, waardoor bovenstaande vergelijking wordt

$$T_n(\theta) = \cos(n\theta) \qquad \text{met} \qquad \theta \in [0,\pi]\,.$$

Er kan een recursiebetrekking afgeleid worden door vast te stellen dat

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\theta) &= \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta \\ T_{n-1}(\theta) &= \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta \end{aligned}$$

waaruit

$$T_{n+1}(\theta) = 2\cos(n\theta)\cos\theta - T_{n-1}(\theta)\,.$$

Dit terug uitgedrukt in termen van de veranderlijke x leidt tot

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad \text{voor elke } 1 \leq n\,. \tag{6.23}$$

Vermits

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \cos(0.\,\text{bgcos}\ x) = 1 \\ T_1(x) &= \cos(1.\,\text{bgcos}\ x) = x \end{aligned}$$

volgen de overige Chebyshev veeltermen gemakkelijk uit (6.23), nl.

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1\ , \ \text{enz...} \end{aligned}$$

Om nu de orthogonaliteit van de Chebyshev veeltermen aan te tonen, beschouwen we

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n\,\text{bgcos}\ x)\cos(m\,\text{bgcos}\ x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Door de substitutie $\theta = \text{bgcos}\ x$ herleidt zich dat tot

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)}{\sin\theta}(-\sin\theta)d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta\ . \end{aligned}$$

Veronderstel $n \neq m$, dan is

$$\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \frac{1}{2}[\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta]$$

en

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos((n+m)\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos((n-m)\theta)d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2(n+m)}\ \sin((n+m)\theta) + \frac{1}{2(n-m)}\ \sin((n-m)\theta)\right]_0^{\pi} = 0\,. \end{aligned}$$

Evenzo

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_{0}^{\pi}\cos^2(n\theta)d\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \text{voor elke } n \geq 1 \qquad \text{en} \\ \int_{-1}^{1} \frac{T_0^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_{0}^{\pi} d\theta = \pi\,. \end{aligned}$$

$\square$

Orthogonale veeltermen bezitten veel interessante eigenschappen, waarvan we er hier enkele expliciet vermelden en bewijzen.

Theorema 6.4.3

Als $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ *een verzameling orthogonale veeltermen is, gedefinieerd in* $[a, b]$ *t.o.v. de gewichtsfunctie* $w(x)$ *en* ϕ_k *is een veelterm van graad* k *voor elke* $k = 0, 1, \ldots, n$ *dan bezit* ϕ_k k *verschillende enkelvoudige wortels en deze wortels liggen in het interval* $[a, b]$ *.*

Bewijs

Vermits ϕ_0 een veelterm van graad nul is, bestaat er dus een constante $C \neq 0$ met $\phi_0(x) = C$. Dit impliceert dat voor $k \geq 1$

$$0 = \int_a^b \phi_0(x)\phi_k(x)w(x)dx = C\int_a^b \phi_k(x)w(x)dx\,.$$

Vermits w een gewichtsfunctie is, is $w(x) \geq 0$ maar $w(x) \not\equiv 0$ in elk deelinterval van $[a, b]$ (zie definitie 6.3.2). Bovenstaande betrekking impliceert dat ϕ_k minstens éénmaal van teken moet veranderen in $[a, b]$. Veronderstel dat ϕ_k precies j maal van teken verandert in $[a, b]$ in de punten $r_1, r_2, \ldots, r_j$ waarbij $a < r_1 < r_2 \ldots < r_j < b$ en dat $j < k$. Zonder aan de algemeenheid van het bewijs te schaden kunnen we aannemen dat $\phi_k(x) > 0$ in $[a, r_1[$; uiteraard is $\phi_k(x) < 0$ in $]r_1, r_2[, \ldots$ en in het algemeen bezit ϕ_k een tegengesteld teken in elk van de aanliggende intervallen $[a, r_1[,\ ]r_1, r_2[, \ldots,]r_j, b]$.

Definiëren we de j^{de} graadsveelterm P als

$$P(x) = \prod_{i=1}^{j}(x - r_i)(-1)^j\,.$$

Bemerk dat het teken van $P(x)$ in overeenstemming is met het teken van $\phi_k(x)$ in elk van de subintervallen $[a, r_1[,\ ]r_1, r_2[\ldots]r_j, b]$ wat leidt tot

$$P(x)\phi_k(x) > 0$$

in elk van deze intervallen. Vermits $w(x) \geq 0$ in $[a, b]$, maar $w(x) \not\equiv 0$ in elk deelinterval van $[a, b]$ impliceert dit dat

$$\int_a^b P(x)\phi_k(x)w(x)dx > 0\,. \tag{6.24}$$

Vermits nu echter $P(x)$ een veelterm is van graad $j < k$, is $P(x)$ te ontwikkelen als een lineaire combinatie van $\phi_k(x)$ $(k = 0, \ldots, j)$, i.e.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{j} \alpha_i\phi_i(x)\,.$$

Daaruit volgt dat

$$\int_a^b P(x)\phi_k(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{j} \alpha_i \int_a^b \phi_i(x)\phi_k(x)w(x)dx = 0$$

wat in strijd is met (6.24).

De enige veronderstelling gemaakt in dit bewijs, is dat ϕ_k precies j maal van teken verandert in $[a, b]$ waarbij $j < k$; uit bovenstaande strijdigheid moet afgeleid worden dat deze veronderstelling foutief is en dat ϕ_k minstens k maal van teken verandert in $[a, b]$. Het middelwaardetheorema impliceert dat er een wortel bestaat bij elke tekenverandering; d.w.z. ϕ_k moet k verschillende enkelvoudige wortels bezitten in $[a, b]$. □

Voor verder gebruik zullen we hier enkele praktische notaties invoeren.

Definitie 6.4.1

Laat $\{\phi_k | k \geq 0\}$ een orthogonale familie in $[a, b]$ t.o.v. de gewichtsfunctie $w(x)$ zijn, dan definiëren we r_n en s_n als volgt :

$$\phi_n(x) = r_n x^n + s_n x^{n-1} + \dots \tag{6.25}$$

Aldus kunnen we schrijven dat

$$\phi_n(x) = r_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) = r_n \Psi(x)\,. \tag{6.26}$$

Hierin stellen de x_i de wortels van de orthogonale veelterm voor en is $\Psi(x)$ de functie, geïntroduceerd in Opmerking 5.1.1.

Bovendien voeren we nog de volgende notaties in :

$$a_n = \frac{r_{n+1}}{r_n} \tag{6.27}$$

en

$$\gamma_n = \int_a^b w(x)\phi_n(x)\phi_n(x)dx > 0 \tag{6.28}$$

□

Theorema 6.4.4 (Theorema over de recursierelatie)

Weze $\{\phi_n\}$ een orthogonale familie veeltermen t.o.v. $[a, b]$ en gewichtsfunctie $w(x)$ dan is voor elke $n \geq 1$

$$\phi_{n+1}(x) = (a_n x + b_n)\phi_n(x) - c_n\phi_{n-1}(x) \tag{6.29}$$

met

$$b_n = a_n\Big[\frac{s_{n+1}}{r_{n+1}} - \frac{s_n}{r_n}\Big] \tag{6.30}$$

$$c_n = \frac{r_{n+1}r_{n-1}}{r_n^2}\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \tag{6.31}$$

Bewijs

Noteer vooreerst dat de recursiebetrekking (6.23) voor Chebyshev veeltermen een voorbeeld is van (6.29). Om (6.29) af te leiden beschouwen we de volgende veelterm

$$\begin{aligned} G(x) &= \phi_{n+1}(x) - a_n x\phi_n(x) \\ &= r_{n+1}x^{n+1} + s_{n+1}x^n + \ldots - \frac{r_{n+1}}{r_n}x(r_n x^n + s_n x^{n-1} + \ldots) \\ &= \Big(s_{n+1} - \frac{r_{n+1}s_n}{r_n}\Big)x^n + \ldots . \end{aligned} \tag{6.32}$$

Het is duidelijk dat de graad$(G) \leq n$. Uit theorema 6.3.2 volgt

$$G(x) = d_n\phi_n(x) + \ldots + d_0\phi_0(x) \tag{6.33}$$

waarbij $d_0, \ldots, d_n$ een aangepaste verzameling constanten zijn. De optredende d_i volgen uit

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{\int_a^b w(x)G(x)\phi_i(x)dx}{\gamma_i} \\ &= \frac{1}{\gamma_i}\Big[\int_a^b w(x)\phi_{n+1}(x)\phi_i(x)dx - a_n\int_a^b w(x)x\phi_n(x)\phi_i(x)dx\Big]. \end{aligned}$$

Uit de orthogonaliteitseigenschappen volgt dat

$$\int_a^b w(x)\phi_{n+1}(x)\phi_i(x)dx = 0 \quad \text{voor} \quad i \leq n$$

en

$$\int_a^b w(x)x\phi_n(x)\phi_i(x)dx = 0 \quad \text{voor} \quad i \leq n-2$$

vermits de graad van $x\phi_i(x) \leq n-1$. Uit die beide resultaten volgt dat

$$d_i = 0 \quad \text{voor} \quad 0 \leq i \leq n-2$$

en daardoor is

$$G(x) = d_n\phi_n(x) + d_{n-1}\phi_{n-1}(x)$$

en

$$\phi_{n+1}(x) = (a_n x + d_n)\phi_n(x) + d_{n-1}\phi_{n-1}(x)$$

Hiermee is het bestaan van een drieterms recursierelatie aangetoond.

Door de coëfficiënten van x^n in (6.32) en (6.33) aan elkaar gelijk te stellen vinden we dat

$$r_n d_n = s_{n+1} - \frac{r_{n+1}s_n}{r_n} \,,$$

waaruit onmiddellijk relatie (6.30) volgt. Anderszijds volgt uit bovenstaande redenering en uit (6.29) dat

$$d_{n-1} = -\frac{a_n}{\gamma_{n-1}} \int_a^b w(x)\phi_n(x)x\phi_{n-1}(x)dx = -c_n \,,$$

waaruit

$$c_n = \frac{r_{n+1}}{r_n}\frac{1}{\gamma_{n-1}} \int_a^b w(x)\phi_n(x)x\phi_{n-1}(x)dx \,.$$

Vermits $x\phi_{n-1}(x)$ een veelterm is van graad n is deze volgens theorema (6.3.2) te schrijven als :

$$x\phi_{n-1} = f_n\phi_n(x) + f_{n-1}\phi_{n-1}(x) + \dots \,,$$

met nog te bepalen constanten f_i. Uit het gelijkstellen van de coëfficiënten van x^n in beide leden volgt dat

$$f_n = \frac{r_{n-1}}{r_n} \,.$$

Als deze gegevens combinerend resulteert in de uitdrukking (6.31) voor c_n. □

Voorbeeld 6.4.3

Bepaal de recursierelatie voor de Legendre veeltermen.

Oplossing

Uit voorbeeld 6.4.1 volgen de waarden voor de coëfficiënten r_n, s_n en γ_n, i.e.

$$r_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \quad s_n = 0 \quad \text{en} \quad \gamma_n = \frac{2}{2n+1} \,.$$

Dit betekent dat $b_n = 0$, $a_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ en $c_n = \dfrac{n}{n+1}$, wat resulteert in de recursierelatie

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

□

Theorema 6.4.5

Voor elke orthonormale verzameling veeltermen $\{\phi_n\}$ (d.i. $\gamma_n = 1$) geldt

$$(x-y)\phi_n(x)\phi_n(y) = G_{n+1}(x,y) - G_n(x,y) \quad (n \geq 1)\,,$$

met $x \neq y$ en

$$G_n(x,y) = \frac{r_{n-1}}{r_n}[\phi_n(x)\phi_{n-1}(y) - \phi_n(y)\phi_{n-1}(x)]$$

Deze formule is ook geldig voor $n = 0$ mits er afgesproken wordt dat $G_0(x,y) = 0$.

Bewijs

Uit theorema 6.4.4 volgt dat

$$x\phi_n(x) = \frac{\phi_{n+1}(x)}{a_n} - \frac{b_n}{a_n}\phi_n(x) + \frac{c_n}{a_n}\phi_{n-1}(x)$$

of

$$x\phi_n(x)\phi_n(y) = \frac{\phi_{n+1}(x)}{a_n}\phi_n(y) - \frac{b_n}{a_n}\phi_n(x)\phi_n(y) + \frac{c_n}{a_n}\phi_{n-1}(x)\phi_n(y)\,.$$

Evenzo krijgen we door verwisseling van x en y

$$y\phi_n(y)\phi_n(x) = \frac{\phi_{n+1}(y)}{a_n}\phi_n(x) - \frac{b_n}{a_n}\phi_n(y)\phi_n(x) + \frac{c_n}{a_n}\phi_{n-1}(y)\phi_n(x)\,.$$

Wanneer we de laatste twee vergelijkingen lid aan lid aftrekken en de optredende coëfficiënten alle uitdrukken in termen van r_k waarden verkrijgen we

$$\begin{aligned}(x-y)\phi_n(x)\phi_n(y) &= \frac{r_n}{r_{n+1}}[\phi_{n+1}(x)\phi_n(y) - \phi_{n+1}(y)\phi_n(x)] \\ &+ \frac{r_{n-1}}{r_n}[\phi_{n-1}(x)\phi_n(y) - \phi_{n-1}(y)\phi_n(x)]\,,\end{aligned}$$

wat gezien de definitie van $G_n(x,y)$ te noteren is als

$$(x-y)\phi_n(x)\phi_n(y) = G_{n+1}(x,y) - G_n(x,y)$$

Voor het geval $n = 0$ volgt enerzijds uit de definitie van $\phi_n(x)$ dat

$$\phi_0(x)\phi_0(y) = r_0^2$$

en anderszijds uit de definitie van $G_n(x)$ dat

$$G_1(x,y) = \frac{r_0}{r_1}(\phi_1(x)\phi_0(y) - \phi_1(y)\phi_0(x)) .$$

Dit laatste kan ook herschreven worden als

$$G_1(x,y) = \frac{r_0}{r_1}[(r_1 x + s_1)r_0 - (r_1 y + s_1)r_0] = r_0^2(x-y) .$$

Uit bovenstaande volgt dat

$$(x-y)\phi_0(x)\phi_0(y) = G_1(x,y) - G_0(x,y) = r_0^2(x-y)$$

als $G_0(x,y) = 0$ gekozen wordt. □

Theorema 6.4.6

Voor elke orthonormale verzameling veeltermen $\{\phi_n\}$ *is*

$$\sum_{r=0}^{n-1} \phi_r(x)\phi_r(y) = \frac{r_{n-1}}{r_n}\frac{\phi_n(x)\phi_{n-1}(y) - \phi_n(y)\phi_{n-1}(x)}{x-y} \tag{6.34}$$

voor $x \neq y$.

Bewijs

Uit theorema 6.4.5 volgt dat

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n-1} \phi_r(x)\phi_r(y) &= \frac{1}{x-y}\sum_{r=0}^{n-1}(G_{r+1}(x,y) - G_r(x,y)) \\
&= \frac{1}{x-y}G_n(x,y) \\
&= \frac{r_{n-1}}{r_n}\frac{\phi_n(x)\phi_{n-1}(y) - \phi_n(y)\phi_{n-1}(x)}{x-y}
\end{aligned}$$

□

Betrekking (6.34) is bekend als de *identiteit van Christoffel-Darboux.*

6.5 Chebyshev veeltermen en foutenreductie

In deze paragraaf zullen we de studie van de Chebyshev veeltermen verderzetten. Deze studie zal tot de volgende resultaten leiden :

- een vastleggen van de optimale keuze voor de knooppunten bij de Lagrange interpolatieveelterm, zo dat de fout zo klein mogelijk wordt;
- een methode ontwikkelen om de graad van een benaderende veelterm te reduceren, zo dat er een minimaal verlies aan nauwkeurigheid is.

Uit de recursiebetrekking (6.23) van de Chebyshev veeltermen is gemakkelijk af te leiden dat, voor elk $n \geq 1$, T_n een veelterm is van graad n met 2^{n-1} als coëfficiënt van x^n.

Theorema 6.5.1

De Chebyshev veelterm T_n van graad $n \geq 1$ bezit n enkelvoudige nulpunten in $[-1, 1]$ bij

$$\bar{x}_k = \cos\Big(\frac{2k-1}{2n}\,\pi\Big) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{6.35}$$

Daarenboven, bezit T_n extremum punten bij

$$\bar{x}'_k = \cos\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) \qquad (k = 0, \ldots, n) \tag{6.36}$$

met

$$T_n(\bar{x}'_k) = (-1)^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)\,.$$

Bewijs

Als $\bar{x}_k = \cos\Big(\dfrac{2k-1}{2n}\,\pi\Big)$ voor $k = 1, 2, \ldots, n$ dan is

$$\begin{aligned} T_n(\bar{x}_k) &= \cos(n \operatorname{bgcos} \bar{x}_k) = \cos\left(n \operatorname{bgcos}\Big(\cos\Big(\frac{2k-1}{2n}\,\pi\Big)\Big)\right) \\ &= \cos\Big(\frac{2k-1}{2}\,\pi\Big) = 0\,. \end{aligned}$$

Aldus is $\bar{x}_k$ een nulpunt van T_n voor elke $k = 1, 2, \ldots, n$. Vermits T_n een veelterm van graad n is, moeten alle nulpunten van T_n van deze vorm zijn.

Om het tweede deel van dit theorema aan te tonen, beschouwen we vooreerst

$$T_n'(x) = \frac{d}{dx}\left[\cos(n \,\mathrm{bgcos}\ x)\right] = \frac{n\ \sin(n\,\mathrm{bgcos}\ x)}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Voor $1 \le k \le n-1$ is dan

$$T_n'(\bar{x}_k') = \frac{n\ \sin(n\,\mathrm{bgcos}(\cos\dfrac{k\pi}{n})))}{\sqrt{1-\cos^2(\dfrac{k\pi}{n})}} = \frac{n\ \sin(k\pi)}{\sin(\dfrac{k\pi}{n})} = 0\,.$$

Vermits bovendien T_n een veelterm van graad n is, is T_n' een veelterm van graad $(n-1)$ en treden dus alle nulpunten van T_n' op bij deze punten. De enige andere mogelijkheden voor extrema van de functie T_n treden op bij de eindpunten van het interval $[-1,1]$, d.i. bij $\bar{x}_0' = 1$ en $\bar{x}_n' = -1$. Vermits

$$T_n(\bar{x}_k') = \cos\left(n\,\mathrm{bgcos}\,\left(\cos(\frac{k\pi}{n})\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

treedt een maximum op bij elke even waarde van k en een minimum bij elke oneven waarde. □

In praktisch gebruik is het zeer dikwijls wenselijk over veeltermen te beschikken met coëfficiënt 1 bij de hoogste graadsterm. Dergelijke veeltermen worden *monisch* genoemd. Voor de Chebyshev veeltermen is de monische versie als volgt te definiëren :

$$\tilde{T}_n(x) = 2^{1-n}\,T_n(x) \qquad \text{voor elke } n \ge 1\,. \tag{6.37}$$

De recursiebetrekking voor $\tilde{T}_n$ volgt rechtstreeks uit (6.23) in combinatie met (6.37), i.e. :

$$\tilde{T}_0(x) = 1\,,\quad \tilde{T}_1(x) = x\,,\quad \tilde{T}_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

en

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = x\tilde{T}_n(x) - \frac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}(x) \qquad \text{voor elke } n > 2\,. \tag{6.38}$$

Omwille van het lineair verwantschap (6.37) tussen T_n en $\tilde{T}_n$ impliceert theorema 6.5.1 dat de nulpunten van $\tilde{T}_n$ eveneens optreden bij

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\,\pi\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

en dat de extrema van $\tilde{T}_n$ voorkomen bij

$$\bar{x}'_k = \cos\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Bij deze $\bar{x}'_k$–waarden, is voor $n \geq 1$

$$\tilde{T}_n(\bar{x}'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots,\, n)\,.$$

Theorema 6.5.2

De veeltermen van de vorm $\tilde{T}_n$ met $n \geq 1$ hebben de eigenschap dat

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| \leq \max_{x\in[-1,1]} |p_n(x)| \tag{6.39}$$

voor alle $p_n(x)$ behorend tot de verzameling $\tilde{\Pi}_n$ van monische veeltermen van de graad n . De gelijkheid in (6.39) is alleen geldig als $p_n = \tilde{T}_n$.

Bewijs

Veronderstel dat $p_n \in \tilde{\Pi}_n$ en dat

$$\max_{x\in[-1,1]} |p_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)|, .$$

Definieer dan $Q = \tilde{T}_n - p_n$. Vermits $\tilde{T}_n$ en p_n beide monische veeltermen zijn van graad n, is Q een veelterm van graad ten hoogste $(n-1)$. Bovendien geldt in de extremum punten van $\tilde{T}_n$

$$Q(\bar{x}'_k) = \tilde{T}_n(\bar{x}'_k) - p_n(\bar{x}'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p_n(\bar{x}'_k)\ .$$

Het feit dat $|p_n(x'_k)| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ impliceert dat voor $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\begin{array}{lll} Q(\bar{x}'_k) \leq 0 & \text{wanneer } k \text{ oneven is}, & \text{en} \\ Q(\bar{x}'_k) \geq 0 & \text{wanneer } k \text{ even is}. & \end{array}$$

Vermits Q continu is, kan het middelwaardetheorema gebruikt worden om hieruit te bewijzen dat de $(n-1)^{de}$ graadsveelterm Q tenminste n nulpunten in het interval $[-1, 1]$ bezit, wat onmogelijk is tenzij $Q \equiv 0$. Dit impliceert $p_n = \tilde{T}_n$. □

Theorema 6.5.2 kan nu gebruikt worden om te antwoorden op de vraag waar de interpolatieknooppunten moeten gekozen worden om de fout in de Lagrange interpolatieveelterm te minimalizeren. Formule (5.6) toegepast op het interval $[-1, 1]$ voor een functie $f(x)$ die $(n+1)$ maal afleidbaar is in $[-1, 1]$ en voor een $\xi_x \in [-1, 1]$ leest

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)\,!}\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

waarbij $p_n(x)$ hier opnieuw de Lagrange vorm voorstelt. Om de fout in het algemeen zo klein mogelijk te maken, kan men zoeken naar waarden voor x_0, x_1, $\ldots$, x_n die de grootheid

$$|(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)|$$

extremeren in het interval $[-1,1]$. Vermits echter $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ een monische veelterm van de graad $(n+1)$ is impliceert theorema 6.5.2 dat dit minimum bereikt wordt als en slechts als

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)=\tilde{T}_{n+1}(x)\,.$$

Wanneer x_k gekozen wordt als de $(k+1)^{de}$ wortel van $\tilde{T}_{n+1}$ voor elke $k=0,1,\dots,n$, d.w.z. x_k wordt geïdentificeerd met

$$\bar{x}_{k+1}=\cos\Big(\frac{2k+1}{2(n+1)}\,\pi\Big)\quad(k=0,1,\dots,n)$$

dan is $\max\limits_{x\in[-1,1]}|\tilde{T}_{n+1}(x)|=2^{-n}$. Dit heeft tot gevolg dat

$$\begin{aligned}\max_{x\in[-1,1]}|(x-\bar{x}_1)(x-\bar{x}_2)\dots(x-\bar{x}_{n+1})|&=\frac{1}{2^n}\\ &\le\max_{x\in[-1,1]}|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|\end{aligned}$$

voor elke keuze van x_0, $x_1,\dots,$ x_n uit het interval $[-1,1]$. Hieruit volgt dat als $p_n(x)$ de interpolatieveelterm van graad tenminste n is met de wortels van $T_{n+1}(x)$ als knooppunten er dan geldt dat

$$\max_{x\in[-1,1]}|f(x)-p_n(x)|\le\frac{1}{2^n(n+1)!}\max_{x\in[-1,1]}|f^{(n+1)}(x)|\,.$$

Deze techniek om punten te kiezen die de fout op de interpolatieveelterm minimalizeert kan gemakkelijk uitgebreid worden tot een willekeurig gesloten interval $[a,b]$ door gebruik te maken van de verandering van onafhankelijk veranderlijke

$$\tilde{x}=\frac{1}{2}[(b-a)\bar{x}+a+b]$$

om aldus de getallen $\bar{x}_k$ in het interval $[-1,1]$ te transformeren in de corresponderende getallen $\tilde{x}_k$ in het interval $[a,b]$.

Chebyshev veeltermen kunnen ook aangewend worden om de graad van de benaderende veeltermen te reduceren met een minimum verlies aan nauwkeurigheid. Dit is een bijzonder bruikbare techniek wanneer de benaderende veelterm een zgn. Taylorveelterm is (= afgekapte Taylorontwikkeling). Alhoewel Taylorveeltermen nauwkeurig zijn in de omgeving van het punt waarrond ze ontwikkeld zijn, verliest men snel aan nauwkeurigheid wanneer ze aangewend worden verder van dit punt weg. Omwille hiervan is het soms nodig hogere–graads Taylorveeltermen aan te wenden om in een gegeven interval een vooraf aanvaarde tolerantie te bereiken. Omdat nu de Chebyshev veeltermen een minimum-maximum waarde bezitten welke uniform gespreid in een interval liggen, kunnen ze gebruikt worden om de graad van een Taylorveelterm te verlagen zonder de fouttolerantie te overschrijden. Volgend voorbeeld illustreert de techniek.

Voorbeeld 6.5.1

De functie $f(x) = e^x$ kan in het interval $[-1, 1]$ benaderd worden door de vierde–graads Taylorveelterm ontwikkeld rond het punt nul (zie (6.2) en (6.3))

$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

met een fout $R_5 = \dfrac{|f^{(5)}(\xi(x))|\ |x^5|}{120} \leq \dfrac{e}{120} \approx 0.023 \quad \text{voor} \quad -1 \leq x \leq 1\,.$

Veronderstel dat een fout 0.05 aanvaardbaar is. Beschouwen we dan de situatie die ontstaat wanneer we de term x^4 in de Taylorveelterm vervangen door de equivalente Chebyshev veeltermen van graad kleiner of gelijk vier. Het is gemakkelijk na te trekken m.b.v. (6.23) en de daaropvolgende algemene vormen voor $T_n(x)$ $(0 \leq n \leq 4)$ dat

$$\begin{aligned} x^0 &= T_0(x)\ , \quad x^1 = T_1(x)\ , \quad x^2 = \frac{1}{2}\,T_0(x) + \frac{1}{2}\,T_2(x)\ , \\ x^3 &= \frac{3}{4}\,T_1(x) + \frac{1}{4}\,T_3(x)\ , \quad x^4 = \frac{3}{8}\,T_0(x) + \frac{1}{2}\,T_2(x) + \frac{1}{8}\,T_4(x)\,. \end{aligned}$$

De uitdrukking voor x^4 gesubstitueerd in $p_4(x)$ levert

$$\begin{aligned} p_4(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{24}\Big[\frac{3}{8}\,T_0(x) + \frac{1}{2}\,T_2(x) + \frac{1}{8}\,T_4(x)\Big] \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{64}\,T_0(x) + \frac{1}{48}\,T_2(x) + \frac{1}{192}\,T_4(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{64} + \frac{1}{48}(2x^2 - 1) + \frac{1}{192}\,T_4(x) \\ &= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{192}\,T_4(x)\,. \end{aligned}$$

Nu is $\max\limits_{x \in [-1,1]} |T_4(x)| = 1$ en $|\dfrac{1}{192}\,T_4(x)| \leq \dfrac{1}{192} = 0.0053$

en $\quad R_5 + |\dfrac{1}{192}\,T_4(x)| \leq 0.023 + 0.0053 = 0.0283$

wat nog kleiner is dan de tolerantie 0.05. Hieruit volgt dat de vierde–orde term $(1/192)T_4(x)$ kan weggelaten worden uit de veelterm en de gewenste nauwkeurigheid blijft nog steeds weerhouden. De derde–graadsveelterm

$$p_3(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3$$

is nauwkeurig binnen de tolerantie 0.05 in het interval $[-1, 1]$. Een poging om de derde–graadsterm te elimineren resulteert in

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}\,x^2 + \frac{1}{6}\Big[\frac{3}{4}\,T_1(x) + \frac{1}{4}\,T_3(x)\Big] \\ &= \frac{191}{192} + \frac{9}{8}\,x + \frac{13}{24}\,x^2 + \frac{1}{24}\,T_3(x)\ . \end{aligned}$$

Nochtans is $\max\limits_{x\in[-1,1]} |\frac{1}{24} T_3(x)| = 0.0417$, wat gecombineerd met de mogelijke fout van 0.0283 vroeger reeds bereikt, een bovengrens voor de fout 0.07 oplevert, wat de voorafgegeven tolerantie overschrijdt; dus $p_3(x)$ is daarom de laagste–graadsveelterm aanvaardbaar voor deze benadering. $\square$

6.6 Interpolatie met rationale functies

De klasse van algebraïsche veeltermen bezit een reeks voordelen voor gebruik in benaderingstheorieën. Er zijn voldoende soorten veeltermen om elke continue functie in een gesloten interval binnen een arbitraire tolerantie te benaderen; veeltermen zijn gemakkelijk berekenbaar bij bepaalde waarden; de afgeleiden en integralen van veeltermen bestaan en zijn relatief eenvoudig te berekenen. Een nadeel bij het gebruik van veeltermen bij benadering is hun neiging tot oscilleren. Deze neiging veroorzaakt bij veeltermbenadering dikwijls foutgrenzen die beduidend de gemiddelde benaderingsfout overschrijden, vermits foutgrenzen bepaald worden door de maximum benaderingsfout. Om deze foutgrenzen te doen dalen, zullen we methoden beschouwen die de benaderingsfout gelijkmatig spreiden over het ganse beschouwde interval. Deze technieken vereisen de invoering van een nieuwe klasse van benaderingsfuncties, nl. de rationale functies.

Een rationale functie r van graad N is een functie van de vorm

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

waarbij p en q veeltermen zijn wier graden sommeren tot N.

Vermits elke veelterm ook een rationale functie is (laat $q(x) \equiv 1$) zullen benaderingen m.b.v. rationale functies resultaten geven met geen groter foutengrenzen dan een benadering m.b.v. veeltermen. Rationale functies hebben het bijkomend voordeel dat ze om een efficiënte benadering kunnen leveren voor functies die een oneindige discontinuïteit bezitten dicht bij, maar buiten het beschouwde interval. Veeltermbenadering is doorgaans niet aanvaardbaar in deze situatie.

Veronderstel dat r een rationale functie is van graad $N = m + n$ van de vorm

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n}{q_0 + q_1 x + \ldots + q_m x^m} .$$

Deze zal aangewend worden om een functie f te benaderen in een gesloten interval I welke nul bevat. Opdat r zou gedefinieerd zijn in het punt nul is het nodig dat $q_0 \neq 0$. In feite kunnen we $q_0 = 1$ onderstellen. Er zijn derhalve $N + 1$ parameters $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_0, p_1, \ldots, p_n$ beschikbaar voor de benadering van f door r.

De *Padé* benaderingstechniek kiest de $N + 1$ parameters zó dat $f^{(k)}(0) = r^{(k)}(0)$ voor elke $k = 0, 1, \ldots, N$. De Padé benadering is de uitbreiding van de Taylorveeltermbenadering naar rationale functies. Als in feite $n = N$ en $m = 0$ is de Padé benadering de Taylorveelterm van graad N ontwikkeld rond nul, d.i. de Maclaurinveelterm van graad N. Veronderstel dat f een Maclaurinontwikkeling $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ bezit. Dan

$$f(x) - r(x) = f(x) - \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)q(x) - p(x)}{q(x)}$$

of

$$f(x) - r(x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^i \sum\limits_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum\limits_{i=0}^{n} p_i x^i}{q(x)} \ . \tag{6.40}$$

De functie $f - r$ en zijn eerste N afgeleiden zullen nul worden voor $x = 0$ als het rechterlid in (6.40) kan geschreven worden als $x^{N+1} Q(x)$ met $Q(x)$ een continue functie. Dit kan echter slechts gebeuren wanneer de coëfficiënten van x^k in de teller van het rechterlid van (6.40) nul zijn voor elke $k = 0, 1, \ldots, N$. Dus $(f - r)^{(k)}(0) = 0$, d.i. $f^{(k)}(0) = r^{(k)}(0)$ voor $k = 0, 1, \ldots, N$ als in

$$(a_0 + a_1 x + \ldots)(1 + q_1 x + \ldots + q_m x^m) - (p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n) \tag{6.41}$$

geen termen voorkomen van graad kleiner dan of gelijk aan N. Om de notatie te vereenvoudigen, definiëren we $p_{n+1} = p_{n+2} = \ldots = p_N = 0$ en $q_{m+1} = q_{m+2} = \ldots = q_N = 0$. We kunnen dan de coëfficiënt van x^k in (6.41) uitdrukken als

$$\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i} - p_k \ ,$$

d.w.z. de rationale functie voor Padé benadering resulteert uit de oplossing van de $N + 1$ lineaire vergelijkingen

$$\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i} - p_k = 0 \ , \qquad k = 0, 1, \ldots, N$$

naar de $N + 1$ onbekenden $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_0, p_1, \ldots, p_n$.

Voorbeeld 6.6.1

De Maclaurinreeksontwikkeling voor e^{-x} is

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i\,!} x^i \ .$$

Om de Padé benadering van e^{-x} van graad 5 met $n = 3$ en $m = 2$ te vinden moeten p_0, p_1, p_2, p_3, q_1 en q_2 zo bepaald worden dat de coëfficiënten van x^k voor $k = 0, 1, \ldots, 5$ in de volgende uitdrukking nul worden

$$(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \ldots)(1 + q_1 x + q_2 x^2) - (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3)\,.$$

Dit leidt tot de volgende vergelijkingen

$$\begin{aligned}
x^5 &: \ -\frac{1}{120} + \frac{1}{24}\,q_1 - \frac{1}{6}\,q_2 = 0 \\
x^4 &: \ \frac{1}{24} - \frac{1}{6}\,q_1 + \frac{1}{2}\,q_2 = 0 \\
x^3 &: \ -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\,q_1 - q_2 = p_3 \\
x^2 &: \ \frac{1}{2} - q_1 + q_2 = p_2 \\
x^1 &: \ -1 + q_1 = p_1 \\
x^0 &: \ 1 = p_0\,.
\end{aligned}$$

De oplossing van dit stelsel is :

$$p_0 = 1\,, \quad p_1 = -\frac{3}{5}\,, \quad p_2 = \frac{3}{20}\,, \quad p_3 = -\frac{1}{60}\,, \quad q_1 = \frac{2}{5} \ \text{en} \quad q_2 = \frac{1}{20}$$

zodat de Padé benadering luidt :

$$r(x) = \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2}\,.$$

In onderstaande tabel sommen we de waarden van $r(x)$ en $p_5(x)$ (de vijfde–orde Taylorveelterm rond $x = 0$) op. De Padé benadering is duidelijk beter in dit voorbeeld.

x	e^{-x}	$p_5(x)$	$\lvert e^{-x} - p_5(x)\rvert$	$r(x)$	$\lvert e^{-x} - r(x)\rvert$
0.2	0.81873075	0.81873067	8.64×10^{-8}	0.81873075	7.55×10^{-9}
0.4	0.67032005	0.67031467	5.38×10^{-6}	0.67031963	4.11×10^{-7}
0.6	0.54881164	0.54875200	5.96×10^{-5}	0.54880763	4.00×10^{-6}
0.8	0.44932896	0.44900267	3.26×10^{-4}	0.44930966	1.93×10^{-5}
1.0	0.36787944	0.36666667	1.21×10^{-3}	0.36781609	6.33×10^{-5}

Het is tevens interessant het aantal rekenkundige bewerkingen vereist voor de berekening van $p_5(x)$ en $r(x)$ te vergelijken. Gebruik makend van geneste vermenigvuldiging kan men $p_5(x)$ als volgt uitdrukken :

$$p_5(x) = 1 - x\left(1 - x\Big(\frac{1}{2} - x\Big(\frac{1}{6} - x\Big(\frac{1}{24} - \frac{1}{120}\,x\Big)\Big)\Big)\right)\,.$$

Aannemend dat de coëfficiënten van $1, x, \ldots, x^5$ voorgesteld worden als decimale getallen vereist één berekening van $p_5(x)$, vijf vermenigvuldigingen en vijf optellingen/aftrekkingen.
Op analoge wijze is $r(x)$ te schrijven als

$$r(x) = \frac{1 - x(\frac{3}{5} - x(\frac{3}{20} - \frac{1}{60}x))}{1 + x(\frac{2}{5} + \frac{1}{20}x)}$$

zodat één enkele berekening van $r(x)$ vijf vermenigvuldigingen, vijf optellingen/aftrekkingen en één deling vereist. Op het eerste gezicht dienen er meer berekeningen uitgevoerd te worden bij rationale vormen. Nochtans kan $r(x)$ heruitgedrukt worden door de breuk te schrijven in de vorm van een kettingbreuk, i.e.

$$\begin{aligned}
r(x) &= \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2} \\
&= \frac{-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 12x + 20}{x^2 + 8x + 20} \\
&= -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} + \frac{(-\frac{152}{3}x - \frac{280}{3})}{x^2 + 8x + 20} \\
&= -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} + \frac{-\frac{152}{3}}{\frac{x^2 + 8x + 20}{x + \frac{35}{19}}} \qquad \text{of}
\end{aligned}$$

$$r(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} + \frac{-\frac{152}{3}}{x + \frac{117}{19} + \frac{3125/361}{(x + \frac{35}{19})}} \tag{6.42}$$

Geschreven in deze vorm, vereist één enkele berekening van $r(x)$ één vermenigvuldiging, vijf optellingen/aftrekkingen en twee delingen.

□

Alhoewel de rationale functiebenadering uit het zojuist geziene voorbeeld resultaten oplevert die superieur zijn aan de veeltermbenadering van dezelfde graad, bezit de rationale functiebenadering een ruime variatie in nauwkeurigheid; de benadering bij 0.2 is exact tot op 8×10^{-9} terwijl bij 1.0 de benadering en de functie slechts in overeenstemming zijn tot op 7×10^{-5}. Die nauwkeurigheidsvariatie is niet onverwacht, omdat de Padé benadering steunt op de Taylorveelterm voorstelling van e^{-x} en deze voorstelling bezit een brede variatie in nauwkeurigheid in $[0.2, 1.0]$.

Om rationale functiebenaderingen met een meer uniforme nauwkeurigheid te bereiken, zullen we een klasse veeltermen bezigen die een uniform gedrag in het interval $[-1, 1]$ bezitten, nl. de Chebyshev veeltermen. De algemene Chebyshev rationale functiebenadering verloopt op analoge wijze als de de Padé benadering. We benaderen een functie f door een N^{de} graads rationale functie r, geschreven in de vorm

$$r(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)} \qquad \text{waarbij} \quad N = n + m \quad \text{en} \quad q_0 = 1 \; .$$

$f(x)$ uitgeschreven als een reeks opgebouwd met Chebyshev veeltermen levert

$$f(x) - r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x) - \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)}$$

of

$$f(x) - r(x) = \frac{\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)\right]\left[\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)\right] - \left[\sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)\right]}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)} \tag{6.43}$$

De coëfficiënten $q_1, q_2, \ldots, q_m$ en $p_0, p_1, \ldots, p_n$ worden zo bepaald dat de teller in het rechterlid van (6.43), uitgedrukt als lineaire combinatie in de $T_k(x)$, coëfficiënten gelijk aan nul heeft voor $k = 0, 1, \ldots, N$.

Twee problemen treden op bij de Chebyshev procedure waardoor ze moeilijker te gebruiken is dan de Padé methode. Eén probleem ontstaat omdat het produkt van $q(x)$ en de reeksontwikkeling voor $f(x)$ produkten van Chebyshev veeltermen doet ontstaan. Dit probleem wordt gemakkelijk opgelost door gebruik te maken van de relatie

$$T_i(x)T_j(x) = \frac{1}{2}[T_{i+j}(x) + T_{|i-j|}(x)] \tag{6.44}$$

wat eenvoudig bewijsbaar is door te steunen op de definitie van T_n en op $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$. Het tweede probleem is moeilijker op te lossen en heeft te maken met de berekening van de Chebyshev reeks voor $f(x)$. In theorie is dit geen moeilijk probleem want indien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$$

dan impliceert de orthogonaliteit van de Chebyshev veeltermen (zie voorbeeld 6.4.2) dat

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \text{en} \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \text{voor} \qquad k \geq 1\ . \end{aligned}$$

In praktijk kunnen deze integralen zelden in gesloten vorm geëvalueerd worden en doorgaans is een numerieke integratietechniek nodig bij elke evaluatie. Hiervoor verwijzen we naar hoofdstuk 8.

Algemene nota

Om de meeste wiskundige functies te evalueren, moeten we meestal eerst berekenbare benaderingen ervoor opstellen. Functies worden op vele wijzen gedefinieerd; integralen en oneindige sommen zijn de meest voorkomende types gebruikt voor dergelijke definities. Zulk een definitie is bruikbaar om de eigenschappen van de functie op te stellen, maar is in het algemeen weinig efficiënt voor de evaluatie van de functie. In dit hoofdstuk hebben we veeltermen en rationale functies ingevoerd als benaderingen voor functies.

De naam van *Brook Taylor* (1685-1731) is bekend aan elke student, die de beginselen van calculus kent. In 1715 schreef hij een boek met de titel *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* waar zijn welbekende ontwikkeling (6.2) vermeld werd. Hij is bovendien auteur van vele werken over fysica, logaritmen en reeksen. Geassocieerd met de naam van Taylor, omwille van het bovengenoemde theorema over reeksontwikkeling, is de naam van *Colin Maclaurin* (1698-1746). Deze Schotse wiskundige kreeg toegang tot de universiteit van Glascow op elfjarige leeftijd. Zijn werk *Treatise of Fluxions* dat verscheen in 1742 te Edinburgh bevat de bespreking van de nu algemeen bekende Maclaurinreeks. Hij is ook bekend voor zijn werk over algebra.

Joseph Fourier (1768-1830) is vooral bekend voor zijn werk over reeksen, die oorspronkelijk gebruikt werden in studies over de warmtestroming.

In 1820 werd *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) aangewezen door koning George IV om het koninkrijk Hannover te meten. Gauss had reeds vroegere ervaringen met het aanpassen van meetgegevens. In 1794 had hij reeds sommige methoden ontwikkeld, waaronder de kleinste kwadraten methode, die hij toen aanwendde voor het vereffenen van geodetische en sterrenkundige problemen. Door gebruik te maken van deze methode was hij in 1801 succesvol in het berekenen van de baan van de planetoïde Ceres met een voldoende nauwkeurigheid, zodat ze opnieuw kon gelocalizeerd worden nadat ze voor meer dan een jaar onvindbaar was na haar ontdekking door de astronoom G. Piazzi van Palermo. De eerste publikatie van resultaten over de kleinste kwadraten methode gebeurde in 1806 door *Adrien-Marie Legendre*. Het probleem zelf was reeds een ruime tijd bekend. In zijn eenvoudigste vorm kan het als volgt verwoord worden: gegeven een verzameling van individuele metingen, vind een gemiddelde waarde zodat de afwijking van de meetresultaten zo klein als mogelijk is. Laplace suggereerde reeds in 1799 dat men de som van de absolute waarden van de fouten zou moeten minimalizeren. De berekening van dit probleem is hoe dan ook moeilijk. Daar tegenover stelde Gauss voor de som van de kwadraten van de fouten te extremeren. Die methode ligt aan de basis van de theorieën, die we in dit hoofdstuk hebben toegelicht.

Pafnutii Lvovitsch Chebyshev (1821-1894) werkte hoofdzakelijk in Sint-Petersburg. Hij was een mathematicus, wiens publikaties invloed hebben gehad op verschillende gebieden van de wiskunde, zoals de getallentheorie, de waarschijnlijkheidstheorie, de theorie van de orthogonale functies en de theoretische mechanica.

Edmond Laguerre (1834-1886) is een Franse wiskundige, die geboren is in Bar-le-Duc. Hij is auteur van werken over meetkunde, algebraïsche vergelijkingen en kettingbreuken.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) werd opgeleid aan het Collège Mazarin te Parijs. In 1775 werd hij professor in de wiskunde aan de Ecole Militaire te Parijs. In gevorderde wiskunde kringen is Legendre bekend voor zijn werk over getallentheorie en elliptische functies.
